RENDICONTI

DEL

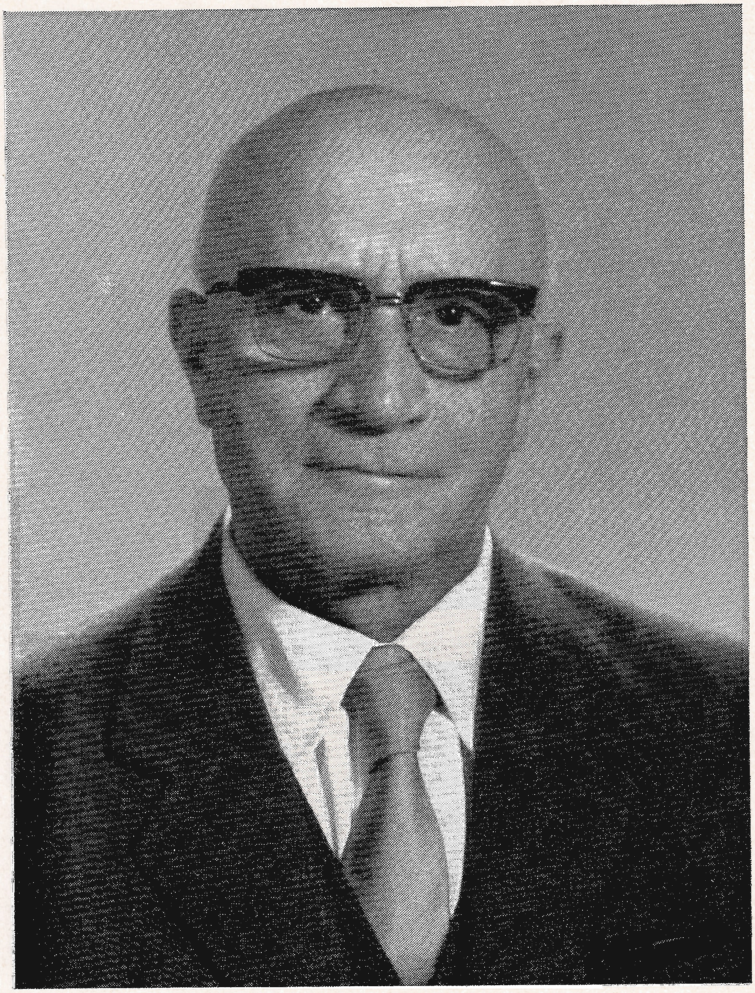
SEMINARIO MATEMATICO E FISICO

DI MILANO

SOTTO GLI AUSPICI DELL' UNIVERSITÀ E DEL POLITECNICO

Vol. XLIII (1973)

TIPOGRAFIA FUSI - PAVIA
1973



Giovanni Ricci

MARCO CUGIANI
dell'Università di Milano

COMMEMORAZIONE DI GIOVANNI RICCI

(*tenuta il 5 novembre 1973*)

Credo che nessun luogo più di questo potrebbe essere considerato una sede opportuna per rievocare la figura e l'opera di Giovanni Ricci.

In queste aule, ancora pochi mesi fa risuonò, seppure ormai affievolita dal male, la sua voce di Maestro, in questi corridoi vedemmo ancor poche settimane fa aggirarsi la sua figura familiare, purtroppo resa ormai debole ed esitante dalla sofferenza.

Nel suo studio, lo vidi, non molti giorni or sono, attardarsi ancora lottando coraggiosamente contro una ineluttabile decadenza fisica, per seguire una consuetudine a Lui tanto cara di assiduità e di operosità, che era stata la ragione fondamentale della sua vita.

Certo a noi tutti fa più piacere di ricordarlo ancora nel pieno vigore delle forze, delle sue forze fisiche, dico, perchè in realtà la lucidità dello spirito non gli fu mai affievolita nemmeno negli ultimi giorni di vita.

Tuttavia io credo che questa immagine di Lui coraggiosamente in lotta col male si sia fusa nell' insieme delle memorie che di Lui serbiamo noi che lo seguimmo da vicino, e costituisca ormai un elemento essenziale del ricordo di questo nostro Maestro, che ci fu largo di insegnamenti nelle discipline matematiche, ma anche di esempi di coraggio, di tenacia, di dedizione al dovere, nella vita di tutti i giorni.

Ma se vogliamo non attardarci troppo sui ricordi più mesti e rievocare tempi più lieti dirò che la prima immagine che mi balza alla mente è certamente quella delle lezioni che io giovane matricola, appena giunto dalla provincia piemontese, ascoltai da Lui, giovane professore appena giunto dalla Scuola normale superiore di Pisa. Era il gennaio del 1937 e Giovanni Ricci era stato nominato il 15 dicembre 1936 professore di analisi matematica nell'Università di Milano.

Se la memoria non mi tradisce e se i successivi ricordi non si sovrappongono troppo a quelle mie impressioni di allora, direi che le due cose che mi colpirono subito in Lui furono la estrema chiarezza delle sue lezioni e la sua sicura padronanza del linguaggio. La chiarezza, la nitida eleganza dell'esposizione furono tra le caratteristiche più spiccate della sua attività e furono quelle che maggiormente contribuirono a farne un meraviglioso didatta. La matematica fu veramente praticata da Lui secondo il concetto cartesiano delle idee chiare e distinte. Contribuì certamente alla formazione di questa lucidità del suo spirito l'ottima scuola da cui derivava, ma anche in modo essenziale vi contribuì il suo acuto senso critico e la sua profonda onestà intellettuale.

In quanto al suo linguaggio debbo confessare che io da buon piemontese, col mio italiano imparato bene al liceo mi trovai sempre un po' in istato d' inferiorità nei confronti del suo eloquio così agile, appropriato ed espressivo che riusciva spesso a collocare la paroletta giusta dove io avevo impiegato magari una pesante circonlocuzione. In questo gli giovò certamente l'esser toscano ed Egli notò spesso sorridendo che il mio italiano era più corretto del suo, perchè da buon fiorentino Egli era portato spesso ad impiegare i suoi idiotismi toscani per pura lingua letteraria.

Probabilmente queste mie idee su di Lui si chiarirono meglio nei nostri successivi rapporti; tuttavia fin dalle prime lezioni è certo che questi lati più esteriori del suo carattere mi colpirono subito, anche se in modo un po' confuso. E più ancora mi colpì, appena ebbi con Lui qualche rapporto un po' più stretto, la sua assoluta onestà, e soprattutto una sua profonda bontà d'animo, mal celata dietro un suo atteggiamento che allora a me parve di una certa rigidezza e quasi di una certa freddezza formale nei modi. Solo più tardi capii bene il senso di quel suo controllarsi continuo, di quella sua preoccupazione di non lasciarsi andare, di non usare espressioni che potessero sembrare affette da un troppo facile sentimentalismo. Ciò derivava non da mancanza di cordialità ma da un certo timore di lasciarsi scivolare verso atteggiamenti che potessero apparire di cattivo gusto e soprattutto da un profondo, quasi religioso senso del dovere, per cui Egli spesso era preoccupato dall' idea che un suo atteggiamento poco controllato potesse essere o anche solo apparire in contrasto colla austerità che Egli pensava naturalmente connessa colle sue delicate funzioni di insegnante e di educatore.

E poichè ho accennato al suo senso religioso devo aggiungere che il quadro della sua rievocazione sarebbe gravemente incompleto se io non ricordassi qui che certo Egli fu uno spirito intimamente religioso, anche se evitò sempre di ostentarlo e se si sforzò sempre di esercitare anche di fronte a questi problemi la sua lucida critica. Chi mi conosce può immaginare che questo lato del suo carattere sia stato causa di contrasti fra noi, contrasti che assunsero sempre l'aspetto di una serena contesa intellettuale, grazie soprattutto al tono garbato che egli seppe sempre dare alla polemica, e alla sua capacità di ascoltare e vagliare colla massima serenità e obiettività le ragioni dei suoi avversari, anche quando esse erano molto lontane dal suo punto di vista.

E questa qualità, che io ammirai in Lui in occasione di ben più aspre polemiche con ben più accaniti avversari, fu sempre da me considerata come il frutto più apprezzabile della sua profonda onestà e del suo grande autocontrollo.

Ed ora, dopo aver ricordato i più significativi aspetti umani di questo nostro Maestro, sarebbe mio desiderio ricordarne, per quanto è possibile, almeno qualcuno di quei brillanti risultati nel campo scientifico ai quali è legata la meritata fama che Egli si procurò fra i matematici italiani e stranieri.

Sarebbe impensabile tentare di dare qui un quadro completo delle sue ricerche, per questo dobbiamo rinviare alla nota bibliografica posta alla fine del presente scritto.

Cercheremo soltanto di dare qualche idea almeno dei lavori del suo periodo pisano. A Pisa infatti e più precisamente alla Scuola normale superiore, dove Egli aveva condotto i suoi studi e dove si era brillantemente laureato nel 1925, Egli ritornò, dopo due anni circa di assistentato a Roma, per trascorrervi il periodo dal 1928 al 1936, questa volta nella qualità di professore, prima straordinario e poi ordinario sempre presso la stessa Scuola normale.

Furono questi certamente gli anni suoi più fecondi per quanto si riferisce alla ricerca, ricerca che Egli rivolse in parte alla geometria differenziale ma soprattutto a svariati campi dell'analisi ed in particolare alla teoria delle funzioni, alla teoria delle serie, e in modo prevalente alla teoria dei numeri.

Quest'ultima assorbì certo dei suoi lavori la parte più cospicua sia per numero che per importanza. Gli argomenti trattati furono soprattutto le proprietà delle radici dell'unità in campi di caratteristica > 0, l'arimetica dei polinomi, le leggi di distribuzione dei primi con particolare riguardo alla congettura di Goldbach, e il settimo problema di Hilbert.

Almeno di queste ultime due questioni nelle quali Egli diede probabilmente i suoi risultati migliori vorrei tentare di dare una idea agli ascoltatori. La cosidetta congettura di Goldbach è una proposizione che risulta dal carteggio che questo matematico tenne con Eulero e può essere così formulata. Ogni numero intero pari > 2 può sempre essere rappresentato come somma di due numeri primi. Per esempio

$$4 = 2 + 2 \qquad 6 = 3 + 3 \qquad 8 = 5 + 3 \qquad 10 = 5 + 5 = 7 + 3$$

ecc.

Qualche volta si suol dare il nome di congettura di Goldbach all'altra proposizione, un po' più debole, che ogni numero intero dispari > 5 si può scomporre nella somma di tre primi.

Dal carteggio dei due matematici si dedurrebbe che essi erano altrettanto sicuri della verità di tali proposizioni quanto incapaci di dimostrarle; la ricerca di una tale dimostrazione si aggiunse quindi alla schiera dei numerosi problemi elementari insoluti della teoria dei numeri.

Si può dire che la questione non fece sostanzialmente nessun progresso nel corso del secolo XIX. Solo nei primi anni del nostro secolo Hardy e Littlewood giunsero a dare una prima risposta che cercherò di riassumere brevemente.

E' ben nota la funzione $\zeta(s)$, definita per $Re\ s > 1$ dalla relazione

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s = \sigma + i\tau \text{ variabile complessa})$$

di cui sappiamo che è regolare in tutto il piano complesso, salvo un polo del primo ordine per $s = 1$, che ha infiniti zeri banali sul semiasse reale negativo e infiniti zeri non banali nella striscia $0 \leq \sigma \leq 1$. E' noto che la distribuzione di tali zeri non banali è strettamente legata alla distribuzione dei numeri primi. Per esempio Hadamard e de la Vallée Poussin ottennero la dimostrazione del teorema fondamentale dei numeri primi, che si può formulare:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \left(\text{dove } \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1\right.$$

è il numero dei primi non maggiori di x) come conseguenza del fatto, previamente dimostrato, che la $\zeta(s)$ non ha zeri sull'orlo della striscia critica ($0 \leq \sigma \leq 1$), ed è ben noto che Riemann formulò addirittura l' ipotesi che tutti gli zeri non banali della $\zeta(s)$ stanno sull'asse della striscia, cioè sulla retta $\sigma = 1/2$; se tale ipotesi è vera il teorema dei numeri primi prenderebbe addirittura la forma $\pi(x) = Li\, x + O(\sqrt{x} \log x)$.

Accanto alla $\zeta(s)$ si possono considerare più in generale le serie di Dirichlet

$$L(s, \chi) = \sum \frac{\chi(n)}{n^s}$$

dove $\chi(n)$ è un qualunque carattere (mod k) cioè, per un fissato numero naturale k, una funzione che gode delle proprietà

$$\chi(n) = 0 \text{, se } (n, k) > 1 ; \; \chi(n, n') = \chi(n) \cdot \chi(n') \text{, se } (n, n') = 1 ;$$
$$\chi(n + k) = \chi(n) .$$

Si possono formulare per le serie di Dirichlet ipotesi analoghe all' ipotesi di Riemann. Per esempio Hardy e Littlewood formularono l' ipotesi attenuata che gli zeri delle serie di Dirichlet cadano tutti in una striscia $(1/4 + \varepsilon \leq \sigma \leq 3/4 - \varepsilon)$ strettamente interna alla striscia $1/4 \leq \sigma \leq 3/4$.

Accettata tale ipotesi essi riuscirono a dimostrare che la congettura di Goldbach è vera per quasi tutti i numeri pari. La cosa va intesa nel senso che se $M(n)$ è il numero dei numeri pari minori di n che non si possono decomporre nella somma di due primi si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(n)}{n} = 0 .$$

Come si intuisce facilmente il raggiungimento di questo primo risultato era subordinato all'uso di concetti e di metodi piuttosto elaborati della teoria delle funzioni analitiche.

Più tardi il problema venne affrontato con metodi più elementari. E qui due strumenti soprattutto vennero sfruttati, il metodo del crivello di Viggo Brun e la teoria della densità delle successioni.

L' idea centrale che sta alla base del metodo di Viggo Brun può essere lumeggiata dal seguente esempio, che però è ben lontano dal mettere in luce le difficoltà che si presentano quando si voglia applicare tale metodo ad un livello che sia effettivamente utilizzabile per una ricerca efficace.

Si sa che in generale vale la formula di Legendre

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = [x] - \sum \left[\frac{x}{p}\right] + \sum \left[\frac{x}{p\,p'}\right] - \sum \left[\frac{x}{p\,p'\,p''}\right] + \ldots\ldots$$

dove p, p', p'' sono i primi minori di $\sqrt{x}$. Se per esempio poniamo $x = 26$ otteniamo

$$\pi(26) - \pi(\sqrt{26}) + 1 =$$

$$= 26\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{2.3.5}\right) + 8\,\theta$$

(dove nel termine di indeterminazione $8\,\theta$ si ha $-1 \leq \theta \leq 1$).

E quindi usando valori arrotondati otteniamo $6{,}9368 + 8\,\theta$; la quantità da valutare è dunque compresa fra $-1{,}07$ e $14{,}94$.

Risultato evidentemente insoddisfacente.

Se però manipoliamo opportunamente i termini fra parentesi potremo scrivere così l'espressione fra parentesi:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.5} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3.5}\right).$$

L'ultimo termine tra parentesi è positivo; se lo sopprimiamo l'espressione da valutare diminuisce, però diminuisce anche l' indeterminazione ed avremo quindi

$$\pi(26) - \pi(\sqrt{26}) + 1 > 26\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.5}\right) - 6\,.$$

In questo caso il vantaggio veramente esiguo consiste nel ricavare che la quantità da valutare è maggiore di 0,066. Il principio tuttavia che in certe situazioni conviene manipolare opportunamente e poi sopprimere dei termini colle relative indeterminazioni risulta chiaro.

Operando in grande si possono ottenere maggiorazioni dal di sopra ed analogamente dal disotto con un resto relativamente piccolo. Con artifici di questo genere per esempio Viggo Brun giungeva a dimostrare per via del tutto elementare che $\pi(x) < \dfrac{7\,x}{\log\,x}$.

Un altro ordine di idee è quello che si riferisce alla densità di una successione di elementi di N_0. Se diciamo $M(n)$ il numero degli elementi della successione (che possiamo pensare formata da elementi distinti ordinati in senso crescente) che risultano minori o uguali ad n, diremo densità della successione il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{n} \quad \text{oppure} \quad \inf_{1\leq n} \frac{M(n)}{n}.$$

Somma di due successioni sarà una successione in cui figurano tutti i numeri che si possono ottenere come somma di un elemento qualunque della prima successione con uno della seconda.

Può accadere che sommando più successioni di densità zero si ottenga una successione di densità positiva o addirittura di densità 1 (che contiene quindi tutti i numeri naturali se assumiamo la seconda definizione, o quasi tutti se assumiamo la prima).

Per esempio la successione dei quadrati

$$1,\ 4,\ 9,\ 16, \ldots$$

ha evidentemente densità nulla, mentre sommandola tre volte con se stessa si ottiene una successione di densità 1 (anche nel secondo significato) in base al celebre teorema di Bachet che ogni numero naturale è esprimibile come somma di quattro quadrati.

La congettura di Goldbach equivale pressappoco al teorema che le successioni dei primi (completata collo zero)

$$0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13, \ldots$$

che ha densità nulla, sommata due volte a se stessa, dà una successione di densità 1 (salvo aggiustare un po' le cose all'inizio).

Un importante accostamento alla dimostrazione della congettura di Goldbach fu dato dal risultato di Schnirelmann.

Esiste una costante S tale che ogni intero è esprimibile come somma di al più S addendi primi. Cioè sommando la successione dei primi a se stessa $S - 1$ volte si ottiene una successione di densità 1 (salvo il solito aggiustamento).

Il calcolo della costante S condotto con metodo piuttosto sommario conduce a maggiorazioni del tipo $S \leq 800.000$. Affinando via via la tecnica si potè giungere a migliorare questo risultato, finchè nel 1936 Heilbronn, Landau e Scherk da una parte e Ricci dall'altra giunsero indipendentemente e quasi contemporaneamente a questi risultati

$$S \leq 71 \qquad S \leq 67\,.$$

Questo risultato fu probabilmente il più celebre fra quelli conseguiti dal Ricci e fu anche quello che mise meglio in luce quella che fu la qualità più tipica di Lui come ricercatore e cioè la paziente abilità con cui sapeva congegnare quegli strumenti di ricerca di cui abbiam dato soltanto una vaga idea, ma una effettiva applicazione dei quali esigeva però un gioco sottilissimo di combinazioni fra elementi presi dall'analisi combinatoria, dall'algebra e dall'aritmetica.

Queste doti si rivelarono in pieno anche nelle sue ricerche sul 7° problema di Hilbert. Ricordiamo che il problema consiste nello stabilire se ξ^η, con ξ ed η algebrici, sia algebrico o trascendente.

Gelfond a conclusione di una lunga serie di ricerche in cui si erano cimentati vari autori diede la soluzione del problema dimostrando che ξ^η è sempre trascendente se $\xi \neq 0,1$ ed η è algebrico irrazionale.

Ricci tentò di estendere queste ricerche al caso in cui ξ ed η fossero trascendenti. Egli fissò l'attenzione sui trascendenti che sono più rapidamente approssimabili con numeri razionali cioè ai cosidetti trascendenti di Liouville che come è noto sono quelli per cui una relazione del tipo

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{q^n}$$

è soddisfatta per una successione illimitata di numeri q, qualunque sia n (p, q, n interi, $(p, q) = 1$).

La sua aspirazione era quella di dimostrare che se ξ ed η sono trascendenti di Liouville allora ξ^η è trascendente.

In realtà Egli giunse a delle proposizioni un po' più deboli che interessano certe sottoclassi dei numeri di Liouville, sottoclassi formate da numeri che, come Egli stesso ebbe a dire, sono « molto di Liouville ».

Per esempio se esiste una successione illimitata $\{q_r\}$ per cui risulti, per valori opportuni p_r:

$$\left| \frac{p_r}{q_r} - \alpha \right| < \frac{1}{q_r^w}$$

con $w = \log^{2+\varepsilon} q_r$, $\varepsilon > 0$, allora il numero $\xi^{\alpha\eta}$ è trascendente se ξ ed η sono algebrici, $\xi \neq 0,1$.

Più tardi nell'ambiente milanese pur continuando a dare notevoli frutti nella teoria dei numeri il suo interesse scientifico si rivolse prevalentemente a questioni di altro tipo e soprattutto alla teoria delle funzioni analitiche ma qui non possiamo che accennare fugacissimamente ad un esempio di quelli che furono i suoi interessi in questo campo.

E' ben noto il teorema di Vivanti secondo cui se una serie di potenze $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ ha raggio di convergenza 1 e coefficienti reali tutti positivi allora la funzione analitica da essa generata ha una singolarità per $z = 1$. Ci si può chiedere se allentando le ipotesi sui coefficienti si possa garantire ancora l'esistenza di una singolarità nel punto $z = 1$ od eventualmente in un archetto abbastanza piccolo simmetrico intorno al punto 1.

Questioni di questo tipo furono trattate per esempio da Vivanti, da Pringsheim, da Hadamard, da Fabry ed altri.

Uno dei risultati notevoli del Ricci in questo campo fu appunto quello di garantire l'esistenza del punto singolare in condizioni particolarmente interessanti che sarebbe però un po' lungo precisare in questa sede.

Questo intenso lavoro di ricerca gli fruttò numerosi riconoscimenti accademici che testimoniano della stima di cui era circondato l'uomo e la sua opera. Dalla nomina a socio corrispondente e poi a membro effettivo dell' Istituto Lombardo, a quella a socio corrispondente dell'Accademia di Torino, a quella infine a socio corrispondente dell'Accademia nazionale dei Lincei.

I suoi brillanti risultati furono anche di ispirazione e di stimolo ad una numerosa schiera di discepoli che Egli guidò con successo sulla via della ricerca, coronando così quell'opera di Maestro nella quale Egli non dimenticò mai di curare con grande scrupolo anche il più umile aspetto della lezione quotidiana.

Accanto al ricercatore illustre, all' insegnante solerte e brillantissimo noi imparammo a conoscere in Lui anche il bibliofilo appassionato. E in questo suo amore per i libri, che lo sorresse nell'opera veramente enorme di creare quasi dal nulla una ottima biblioteca per l' Istituto di Matematica, entravano in egual misura il suo amore per lo studio, la sua passione di insegnante e il suo gusto estetico raffinatissimo.

Perchè in realtà Egli fu soprattutto un esteta, un amante delle cose belle, ben ordinate, accuratamente rifinite, e quello stesso senso estetico che gli imponeva una esigenza di estrema chiarezza, di ordine, di coerenza nella sua ricerca scientifica e nel suo insegnamento gli fu anche di guida nella sua condotta morale imponendogli una misura, un riserbo, un autocontrollo che escludesse qualunque atto che potesse sembrare comunque di cattivo gusto.

Le sue doti di rettitudine e di equilibrio gli valsero di esser chiamato a ricoprire posti di responsabilità nell'organizzazione della vita universitaria e della ricerca matematica. Fu per tre anni presidente dell'U.M.I., per undici anni direttore dell' Istituto matematico della nostra Università e per tre anni insieme al collega Occhialini fu presidente di questo nostro sodalizio che oggi per la mia voce lo commemora con reverente commozione, nella speranza che il ricordo della sua nobile figura, che la tradizione di elevato sapere, di impegno nella ricerca e nell' insegnamento che Egli ci ha trasmessa, sia di modello e di sprone a noi che quasi tutti siamo stati suoi scolari, per proseguire coraggiosamente nelle dure battaglie che le non rosee prospettive della vita universitaria ci fanno presagire per l' immediato futuro.

BIBLIOGRAFIA

PRIMA PARTE

1. Le trasformazioni di Christoffel e di Darboux per le superficie rotonde, coniche e cilindriche. Alcune generazioni per rotolamento del cono e del cilindro di rotazione.
   (Tesi di laurea, 15 dicembre 1925).
   Ann. R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Cl. Sc. fis. e mat., Vol. XV (1927), pagine 64.
2. Determinazione del massimo limite e del minimo limite della somma di funzioni periodiche continue, per la variabile indefinitamente crescente.
   Boll. U.M.I., Vol. IX (1930), pp. 211-217.
3. Sulle funzioni simmetriche di interi costituenti uno o più sistemi ridotti di resti, secondo un modulo composto.
   Ann. d. Univ. Toscane, Vol. XIII (1930), nuova serie, pp. 177-198.
4. Sulle somme delle potenze simili degl' interi naturali e sui coefficienti del fattoriale.
   Ibid., pp. 199-216 (1930).
5. Un perfezionamento dei teoremi di Sylvester, N. Nielsen, Saalschütz, Lipschitz sui numeri di Bernoulli.
   Giornale di Matem. di Battaglini, Vol. 69 (1931), pp. 1-4.
6. Sui coefficienti binomiali e polinomiali. Una dimostrazione del teorema di Staudt-Clausen sui numeri di Bernoulli.
   Giornale di Matem. di Battaglini, Vol. 69 (1931), pp. 9-13.
7. Sulle funzioni simmetriche delle radici dell'unità secondo un modulo composto.
   Ann. Matem., serie IV, tomo IX (1931), pp. 181-193.
8. Due proprietà caratteristiche delle funzioni a rapporto incrementale limitato.
   Boll. U.M.I., Vol. X (1931), pp. 131-134.
9. On a generalization of the Wilson-Glaisher theorem.
   Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 38 (1932), pp. 393-397.